

## 確率ウェイト関数とベータ分布

犬童健良<sup>a</sup>

### 要約

確率ウェイト関数は現実の人々のリスク下の意思決定をモデル化するため、意思決定研究の諸分野で研究されてきた。確率ウェイト関数のグラフの典型的な形状は逆S字である。ベータ分布は2つのパラメータ $\alpha$ 、 $\beta$ を用いる確率分布であり、 $1 > \alpha > \beta > 0$  のとき、ベータ分布の累積分布のグラフ形状は逆S字となる。本研究は、文献で報告された実証的な確率ウェイト関数の形状を近似するベータ分布の具体的な例を示した。また金額の大きさに応じて反モードが変化することが、確率ウェイトと賞金金額との主観的相関を説明する可能性を指摘した。

JEL 分類番号:D81,D91

キーワード:プロスペクト理論, 確率ウェイト関数, ベータ分布

---

<sup>a</sup> 関東学園大学経済学部 kindo@kanto-gakuen.ac.jp

## 1. はじめに

確率ウェイト関数は現実の人々のリスク下の意思決定をモデル化するため、心理学、経済学、経営科学などの諸分野で研究されてきた。とりわけ行動経済学における代表的な理論の一つであるプロスペクト理論に採用されたことで有名である。現実の人々の確率ウェイト関数のグラフの典型的な形状は逆 S 字である。プロスペクト理論は、参照点に依存する選択をする傾向がある現実の人々のリスクへの態度を簡潔な数理モデルによって記述し、また実証的なパラメータを用いた定量的なモデルによって行動選択を予測できる。Tversky & Kahneman (1992)の累積プロスペクト理論(以下 CPT と略す)が提案した確率ウェイト関数は、以下のような1パラメータの関数形である。

$$w(p) = p^\gamma / (p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{1/\gamma} \quad (1)$$

パラメータ  $\gamma$  が1の場合は線形であり、 $w(p) = p$ である。Tversky & Kahneman(1992)はくじの確実性等価値を用いた実験によって確率ウェイト関数を推定し、そのパラメータの中央値を、利得の場合が  $\gamma = 0.61$ 、損失の場合が  $\delta = 0.69$  と推定している。

## 2. 確率ウェイト関数およびプロスペクト理論の問題点

より最近の Takemura & Murakami (2016)において報告された被験者全体(49名)の中央値の分布形状は、Tversky らのパラメータ値のグラフと大きく乖離してはいない。しかし同じ Takemura & Murakami (2016)の実験データを個別の被験者で見た場合、適合するパラメータ値のばらつきは無視できず、Takemura らが試した7種類の代替的な確率ウェイト関数の中では、多くの個別ケースで、Tversky & Kahneman の関数形は、明らかに劣る。

またプロスペクト理論は Allais パラドックスのような期待効用最大化の仮定に反する旧知の例題を予測可能にすることを当初目標として提案されたものだったが、Allais の例題(共通結果効果)を参照点シフトなし CPT で予測するためには、 $\gamma$  は 0.3 程度という極端な非線形バイアスを必要とし、CPT モデルでの実証値 0.61 から大きく乖離する。また、もし Takemura & Murakami (2016)の示した  $\gamma$  のヒストグラム(Figure 7A)がもし正しいとすると、傾向としてこの代表的な数値例を CPT で予測することは事実上ほぼ不可能である。さらに、プロスペクト理論の提案された元々の意図は、参照点に依存する選択を記述することだが、関数形(1)は参照点の金額シフトに対しても感応的ではない。こうした事実を踏まえると、確率ウェイト関数の改良なしに、プロスペクト理論の予測力を信頼することはむずかしいと言わざるを得ない。

### 3. マッチング法則から得られる確率ウェイト関数

Takemuraらの前述の論文では、AIC 基準の下での適合ランキングにおいて、一般化双曲割引 (Takahashi, 2011) を最良としている。Takahashi (2011) の一般化双曲割引を用いた確率ウェイト関数は、時間割引率の心理学研究から見出されたマッチング法則から導かれており、関数形は  $w(p) = 1 / (1 + k(1/p - 1))^a$  である。実はこの関数形の下では、前述の Allais の例題の典型的な選択パターンをより自然に表現できる。犬童 (2019) は事実上 Takahashi の関数形に視覚的な解釈を与えたものである。またこの確率ウェイト関数が参照点のシフトに対しても感応的であり、Tversky らの関数形よりも自然に Allais パラドックスを説明することができることを示している。

### 4. ベータ分布

ところで、ベータ分布は、統計的学習などの機械学習手法を用いる近年のコンピュータによるデータ分析において、工学的によく利用されている確率分布である (例えば奥村・瓜生・牧山, 2018)。またベータ分布はリスクと意思決定の認知モデルに欠かせないツールになっている (Busemeyer & Diederich, 2010; 豊田, 2017)。ベータ分布は経験ベイズ手法における事前分布を与え、かつ事後分布を簡潔に計算することができる。ベータ分布は統計学では古くから研究されている (カール・ピアソンの数表が有名である)。その累積分布は、数学的には正規化不完全ベータ関数  $I_x(\alpha, \beta)$  である。すなわち  $I_x(\alpha, \beta) = B_x(\alpha, \beta) / B(\alpha, \beta)$  であり、ここで  $B(\alpha, \beta)$  は不定積分  $B(\alpha, \beta) = \int t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$ 、すなわちベータ関数、 $B_x(\alpha, \beta)$  はその 0 から  $x \leq 1$  までの定積分 (不完全ベータ関数) である。例えば自由度  $\nu$  のスチューデントの  $t$  の累積分布が、 $I_x(\nu/2, \nu/2)$  である。両パラメータが 1 以下のとき、ベータ分布の累積分布のグラフ形状は逆 S 字である。とくに、 $\alpha = \beta = 0.5$  の場合、 $I_x(1/2, 1/2)$  はジェフリーズの事前分布 (Jeffrey's prior)、また  $\alpha = \beta = 0$ 、 $I_x(0, 0)$  はホールダインの事前分布 (Haldane's prior) と呼ばれる。

### 5. ベータ分布による確率ウェイト関数の近似

CPT の確率ウェイト関数 (1)、 $\gamma = 0.61$  のグラフは、 $\alpha = 0.4$ 、 $\beta = 0.3$  のベータ分布  $I_x(0.4, 0.3)$  と似ている (図 1)。また  $\gamma = 0.69$  に変更したグラフは、 $\alpha = 0.55$ 、 $\beta = 0.47$  などとすると近いグラフ形状が得られる。 $\alpha, \beta < 1$  のベータ分布の反モード (anti-mode) は  $(\alpha - 1) / (\alpha + \beta - 2)$  であるが、前述のパラメータに当てはめると、 $0.46 \sim 0.47$  と、グラフ形状が損失と利得で明らかに変化するにも関わらず、反モードが安定していることが分かる。

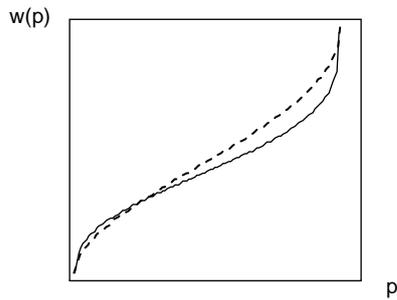


図1 ベータ分布（実線  $\alpha = 0.4$ ,  $\beta = 0.3$ , 破線  $\alpha = 0.55$ ,  $\beta = 0.47$ ）

## 6. 金額の大きさによる確率ウェイト関数の変化

実は, Tversky & Kahneman の実験データの分布をよく見ると,  $\circ$ は金額が 200 超,  $\triangle$ が 200 以下である. したがって, 金額によって確率ウェイト関数のグラフ形状が若干変わるはずである. ベータ分布を $\triangle$ の場合, つまり小さい金額の場合に当てはめてみると, 利得では  $I_x(0.5, 0.3)$ , 損失では  $I_x(0.6, 0.44)$ あるいは  $(I_x(0.7, 0.5))$  でおおよそ近似できる. これらの反モード値は, 0.42 である(ただし  $(0.7, 0.5)$ では 0.38).

確率ウェイト関数の金額依存性は, 近年注目されているリスク・報酬ヒューリスティック(Plescac & Hertwig, 2014)と関連があると考えられる.

## 7. 個別の被験者の確率ウェイト関数の近似

Takemura & Murakami(2016) Figure 6 では, 被験者個別の確率ウェイト関数の分布へのモデル適合例が示されている. 図3はこのうち被験者 7, 19, 25 の3名に見られるおおよそのグラフ形状を,  $(\alpha, \beta) = (0.2, 0.3), (0.4, 0.2), (0.3, 0.3)$ としてそれぞれ近似した.

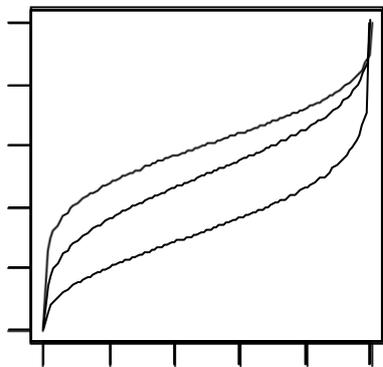


図2. 個別の被験者に対する確率ウェイト関数のグラフ

## 8. まとめ

Kahneman と Tversky(1979)は, 現実の人間の参照点依存選好をモデル化するプロスペクト理論を提案したが, 価値関数とともにその評価局面の定量的ツールとしてかなめになっている確率ウェイト関数の関数形についてはさまざまな代替案があり, Tversky & Kahneman(1992)の関数形は個別の被験者に対する予測には有用でないと考えられる. 代替的な方法としてのマッチング法則(双曲時間割引)から導かれる確率ウェイト関数は, より柔軟なモデル記述能力を持つと考えられるが, 本研究の考察からベータ分布を用いることで, より簡便なモデル化が可能になると期待される. プロスペクト理論の強みは, 参照点依存と結果の事象の分割にあると思われるので, これらを組み合わせた分析をする際に有用であると思われる. しかしベータ分布が当てはまるというのは, あくまで観察される事実, あるいは工学的な有用性にすぎず, ベータ分布が行動経済学的に, あるいは意思決定者の認知モデルと妥当であるかどうかは論考の余地があるかと思われる. あえて解釈するならば, それは経験的ベイズ手法における事前分布のバイアスのかかったバージョンである. これをマッチング法則に基づくモデルと関連付けることが必要ではないかと思われる. なぜならば, リスク選択と直接関連していないが, 文脈効果の研究を鑑みて, マッチング法則から乖離する選択パターンが生じることも考えられるからである.

## 引用文献

- Allais, M., 1953. Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'école américaine. *Econometrica* 21, 503-546.
- Busemeyer, J.R., and A. Diederich, 2010. *Cognitive Modeling*, London:Sage Publications.
- 犬童健良, 2019. マッチング法則からの確率ウェイト関数の近似について, 行動経済学会 13 回大会ポスター発表. [http://www.abef.jp/conf/2019/common/doc/poster/P20\\_PR0060.pdf](http://www.abef.jp/conf/2019/common/doc/poster/P20_PR0060.pdf)
- 奥村晴彦・瓜生真也・牧山幸史, 2018. *Rで楽しむベイズ統計入門*, 東京:技術評論社.
- Kahneman, D., and A. Tversky, 1979. Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica* 47, 263-291.
- Plescac, T.J., and R. Hertwig, 2014. Ecologically rational choice and the structure of the environment. *Journal of Experimental Psychology: General*, 143, 2000-2019.
- Takemura, K., and H. Murakami, 2016. Probability Weighting Functions Derived from Hyperbolic Time Discounting: Psychophysical Models and Their Individual Level Testing. *Front. Psychol.* 7:778. doi: 10.3389/fpsyg.2016.00778
- 豊田秀樹(2017). *実践ベイズモデリング*, 東京:朝倉出版.
- Tversky, A., and D. Kahneman, 1992. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty* 5 (4), 297-323.